流言の空間伝播モデルの進行波解 (第4回生物数学の理論とその応用)

河内, 一樹

数理解析研究所講究録
第 1597 巻 2008 年 15-18

流言の空間伝播モデルの進行波解

東京大学・数理科学研究科　河内 一樹 (Kazuki Kawachi) [1]
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

概要

RIMS 研究集会，第 4 回「生物数学の理論とその応用」において 2007 年 10 月 29 日に講演した内容を紹介する．

まず，流言の伝播・空間拡散について説明する．次に空間分布を無視した流言伝播のモデルを紹介し，感染症モデルとの相違点や解の挙動について述べる．そして，流言伝播のモデルに空間分布を組み入れた線形拡散モデルを考察し，その進行波解および最小速度の線形近似による見積もりを紹介する．

1　導入

流言には様々なものが存在する.「病原性大腸菌 O-157 の感染源はカイワレ」というように天変地異や集団的災害が話題になる流言もあれば，漫画『ドラえもん』の最終回に関する流言のように，子供たちが伝播の担い手となることもある．また「ピアスの白い糸」に代表される，一般に都市伝説，現代伝説と呼ばれるものも存在する．しかし，共通して言えるのは，コミュニケーションの連鎖のなかで短期間に大量に発生した，ほぼ同一内容の言説である，という点であり，このように記述される社会現象を以下では流言と呼ぶことにする（以上の流言の定義は早川 [1] に依った）.

流言伝播の数理モデルとしては，Daley-Kendall model や Maki-Thompson model がよく知られており，従来は確率論を舞台として研究が進められてきた．一方で，遅れを取っているが決定論的モデルもいくつか調べられている（一例や流言伝播の数理モデルの文献については Kawachi [2] を参照せよ）.

その中で未だに研究がほとんど進められていないのが，流言が空間中を拡散する速度である.「悪事千里を走る」と諺にあるように，人々が関心を寄せる流言が空間中を拡散する速度は非常に速いと考えられている．例えば関東大震災のように，災害による被害が壊滅的で，既存の社会組織や通常の社会規範が一時的に消滅すると「噴出流言」と呼ばれる流言が瞬く間に広がる．実際，関東大震災では，横浜で発生した「朝鮮人流言」がわずか 1 日強で福島まで伝わっている（詳細は廣井 [3] を参照）．現在では通信網が非常に発達しており，従来の数理モデルで前提とされていた「人々の接触による情報伝達」だけを対象として流言伝播の数理モデルを構築するのはいささか不適切であると考えられなくもない．しかしながら，災害時に通信網が大きな被害を受け，情報伝達が人々の接触に非常に大きく依存するというケースも十分に考えられる．その場合に流言が拡散して社会を更なる混乱に陥れる危険性を政府当局が防止することは非常に重要であり，そのためにも流言拡散の速度を見積もる意義があろう．

2　流言伝播モデル

閉じた人口集団を考え，人口を 3 つに分ける．感受性人口（流言を知らない人たち），広め役人口（流言を知って広める人たち），そして火消し役人口（流言を知っており，広めない人たち）の 3 つである．時刻 t におけるそれぞれの人口密度を $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ と表す．感受性の人と広め役の人が出会い，話をすることで流言が広め役の人から感受性の人に伝えられる．流言に関する情報を得た感受性の人は，一定の割合 θ で広め役となる．つまりその流言に関心を持って他の人たちと接触し流言を話題に出す．一方，残りの割合 $1-\theta$ で火消し役となる．これには例えば流言に関して興味を示さない，あるいは事前に何らかの情報を持っていたために流言に対して否定的な立場を取るなどの要因が考えられよう．こうして流言が次から次に伝播する中で，いつかは流言が収束するのが一般的である．例えば，広め役の人たちは，繰り返しその流

[1] E-mail:kkawachi@ms.u-tokyo.ac.jp

言を話題にするうちに飽きて興味を失う可能性が考えられる．また，広め役の人と火消し役の人が出会い，広め役の人が流言を話題にしようとすると火消し役の人がその流言に興味を示さない，あるいは流言そのものを否定することで広め役の人が今度は火消し役となる可能性もあろう．

以上を考慮して，次のような流言伝播のモデルを考える：

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -\alpha X(t)\frac{Y(t)}{N(t)}, \\ \dot{Y}(t) = \alpha\theta X(t)\frac{Y(t)}{N(t)} - \beta Y(t)\frac{Y(t)}{N(t)} - \gamma Y(t)\frac{Z(t)}{N(t)}, \\ \dot{Z}(t) = \alpha(1-\theta)X(t)\frac{Y(t)}{N(t)} + \beta Y(t)\frac{Y(t)}{N(t)} + \gamma Y(t)\frac{Z(t)}{N(t)}. \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで $\dot{}$ は時刻 t に関する微分を表す．$N(t) := X(t) + Y(t) + Z(t)$ は全体の人口密度，α は感受性の人と広め役の人が出会い流言が話題になる割合，β は広め役の人同士が出会い流言が話題になり，そのことで広め役の人が火消し役になる割合，γ は広め役の人と火消し役の人が出会い流言が話題になり，そのことで広め役の人が火消し役になる割合を表す．α, β, γ は全て正であるとする．

上記の流言伝播のモデルについて 2 つ注意する．1 つは，このモデルが Kermack と McKendrick により提唱された感染症流行のモデル [4] を修正したものである．比較対照として，次の感染症流行モデルを見てみる：

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\alpha S(t)\frac{I(t)}{N(t)}, \\ \dot{I}(t) = \alpha S(t)\frac{I(t)}{N(t)} - \mu I(t), \\ \dot{R}(t) = \mu I(t). \end{cases} \tag{2.2}$$

$S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ はそれぞれ，時刻 t における感受性人口，感染人口，隔離人口の人口密度を表し，これらの和が $N(t)$ である．α は感受性の人と感染者が接触して感染症をうつす割合，μ は感染者が隔離される割合を表す．このモデルを含め，感染症モデルでは感染者間の相互作用や感染者と隔離者間の相互作用は存在しない，あるいは考慮しないのが一般的であり，感染者はその人口密度に比例して隔離状態に移行する．一方で，流言伝播モデルでは（感染者に対応する）広め役間の相互作用や広め役と（隔離者に対応すると考えられる）火消し役の間の相互作用が考慮されている．2 つ目に，方程式 (2.1) では個体間の相互作用を単純に扱いすぎていることに注意せよ．より多くの相互作用を考慮した流言伝播モデルも提唱されている (cf. Kawachi etc. [5]) が，ここでは詳細に立ち入らないことにする．

方程式 (2.1) について数学的に議論する．閉じた人口を考えているので $N(t)$ は t に依存しないが，これは (2.1) の辺々を足し合わせて容易に分かる．そして

$$x(t) := \frac{X(t)}{N(t)}, \quad y(t) := \frac{Y(t)}{N(t)}, \quad z(t) := \frac{Z(t)}{N(t)}$$

という新たな関数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ を考える．これらはそれぞれ，時刻 t において全人口に占める感受性，広め役，火消し役の割合を表している．$\tau := \alpha t$ によって時間のスケーリングを行い，パラメータの種類を減らすことができる．この τ に関する微分を $'$ で表すことにすると，(2.1) は次の方程式系と同値である：

$$\begin{cases} x' = -xy, \\ y' = \theta xy - by^2 - cyz, \\ z' = (1-\theta)xy + by^2 + cyz. \end{cases} \tag{2.3}$$

ここで $b := \alpha^{-1}\beta$, $c := \alpha^{-1}\gamma$ である．

(2.3) の解について簡単に議論しよう（詳細は [2] を参照）．簡単のために τ を改めて t と書き直し，$0 < \theta \leqq 1$, $b > 0$, $c > 0$ を仮定する．このとき，(2.3) の初期値問題 $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ が一意に（$t \in \mathbb{R}$ 全体で）解を持ち，かつ $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$, $z_0 \geq 0$, $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ ならば $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$, $z(t) \geq 0$, $x(t) + y(t) + z(t) = 1$ が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ．このもとで，$x(t)$ は単調減少，$z(t)$ は単調増加であるから $(x(t), y(t), z(t))$ は $t \to \pm\infty$ で収束し，極限を $(x(\pm\infty), y(\pm\infty), z(\pm\infty))$ と表すと，$y(\pm\infty) = 0$ が容易に分かる．さらに，$x(+\infty)$ は $x(-\infty) \in (c(c+\theta)^{-1}, 1]$ の単調減少関数であることが，例えば x, y のみの相図で解曲線同士が互いに交差しないことから導かれる．

3　流言伝播の線形拡散モデル

(2.1) で与えられる流言伝播のメカニズムに，各個体がランダムウォークで空間を移動する効果を組み込むと，下記のような流言の空間分布を考慮した反応拡散方程式系（cf. Murray [6]）を考えることが出来る：

$$\begin{cases}\partial_t X = d_X \partial_u^2 X - \alpha XY, \\ \partial_t Y = d_Y \partial_u^2 Y + \alpha\theta XY - \beta Y^2 - \gamma YZ, \\ \partial_t Z = d_Z \partial_u^2 Z + \alpha(1-\theta)XY + \beta Y^2 + \gamma YZ,\end{cases} \tag{3.1}$$

ここで t は時刻，u は空間変数（1 次元），∂_t は t による偏微分を表し，d_X, d_Y, d_Z は拡散係数で非負である．

本節では，十分遠方 $u \to -\infty$ で発生した流言が，感受性個体が一様にいる人口集団中を $u \to \infty$ に向かって一定の速度，一定の形を保って波のように伝播していく状態を表す (3.1) の解について議論する．正確には，

$$X(u,t) = \tilde{X}(u-ct),\ Y(u,t) = \tilde{Y}(u-ct),\ Z(u,t) = \tilde{Z}(u-ct) \tag{3.2}$$

と表される，ある速度 c で動く動座標系 $v = u - ct$ で見ると時間によって形が不変に保たれる解を考える．(3.2) を (3.1) に代入して，$\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ に関する常微分方程式系

$$\begin{cases}d_X \tilde{X}'' + c\tilde{X}' - \alpha\tilde{X}\tilde{Y} = 0, \\ d_Y \tilde{Y}'' + c\tilde{Y}' + \alpha\theta\tilde{X}\tilde{Y} - \beta\tilde{Y}^2 - \gamma\tilde{Y}\tilde{Z} = 0, \\ d_Z \tilde{Z}'' + c\tilde{Z}' + \alpha(1-\theta)\tilde{X}\tilde{Y} + \beta\tilde{Y}^2 + \gamma\tilde{Y}\tilde{Z} = 0.\end{cases} \tag{3.3}$$

を得る．$'$ は v に関する微分である．この方程式系の境界条件を次のように定めよう．流言が侵入する前（$v \to \infty$）は感受性個体の密度が $X_0(>0)$ で広め役も火消し役もいない．一方流言が伝播した十分後方（$v \to -\infty$）は広め役がいなくなり，流言を知った人は全て火消し役になっている．これより

$$\begin{aligned}&\tilde{X}(\infty) = X_0,\ \tilde{Y}(\infty) = 0,\ \tilde{Z}(\infty) = 0, \\ &\tilde{X}(-\infty) = a,\ \tilde{Y}(-\infty) = 0,\ \tilde{Z}(-\infty) = b\end{aligned} \tag{3.4}$$

と定める．ここで $\tilde{X}(\infty) := \lim_{v\to\infty}\tilde{X}(v)$ などであり，$a < X_0$ は非負の未知定数，b は正の未知定数である．

(3.3) (3.4) をともに満たす非負値関数の組 $(\tilde{X}(v), \tilde{Y}(v), \tilde{Z}(v))$ が方程式 (3.1) の進行波解であり，我々が対象とするのは進行波解が存在するための速度 c の条件である．

ここでは簡単に，進行波解の最小速度を線形予測によって予想する．進行波解が存在するならば，波が進む先端では $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ はほぼ $(X_0, 0, 0)$ であるとみなせる．従って，$\tilde{Y}$ に対する方程式を

$$d_Y \tilde{Y}'' + c\tilde{Y}' + \alpha\theta X_0 \tilde{Y} = 0 \tag{3.5}$$

と線形近似することができる．この 2 階線形常微分方程式の特性方程式は

$$d_Y \lambda^2 + c\lambda + \alpha\theta X_0 \lambda = 0$$

であり．$c^2 - 4d_Y\alpha\theta X_0 < 0$ ならば (3.5) の一般解は原点の周りで振動し，負になるところが現れる．ところが，進行波解は非負値関数でなければならないのでこれは矛盾であり，進行波解が存在するための必要条件として

$$c \geq c^* := 2\sqrt{d_Y\alpha\theta X_0}$$

が得られる．

線形予測の妥当性について，感染症モデルでは Källén [7], Hosono and Ilyas [8] などで確かめられている一方で，線形予測が当てはまらない例が Hadeler and Rothe [9] によって報告されている．これらを参考にしつつ，我々のモデルにおける進行波解がいかなる条件で存在し，漸近的にどのような挙動を示すのか厳密に調べるのは今後の課題である．

参考文献

[1] 早川洋行 (2002), 流言の社会—形式社会学からの接近—, 青弓社, 208p. (ISBN 4-7872-3208-8)

[2] K. Kawachi, Deterministic Models for Rumor Transmission, *Nonlinear Analysis, RWA*, in press.

[3] 廣井脩 (2001), 流言とデマの社会学, 文藝春秋. (ISBN 4-16-660189-X)

[4] W. O. Kermack and A. G. McKendrick (1927), Contributions to the mathematical theory of epidemics I, *Proceedings of the Royal Society* 115A: 700–721. (Reprinted in *Bulletin of Mathematical Biology* 53(1/2): 33–35, 1991.)

[5] K. Kawachi, M. Seki, H. Yoshida, Y. Otake, K. Warashina, and H. Ueda, A rumor transmission model with various contact interactions, *Journal of Theoretical Biology*, in press.

[6] J. D. Murray (1989), *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, New York.

[7] A. Källén (1984), Thresholds and travelling waves in an epidemic model for rabies, *Nonlinear Analysis, TMA*, 8: 851–856.

[8] Y. Hosono and B. Ilyas (1995), Traveling waves for a symple diffusive epidemic model, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 5: 935–966

[9] K. P. Hadeler and F. Rothe (1975), Traveling fronts in nonlinear diffusion equations, *Journal of Mathematical Biology*, 2: 251–263.